正则半群代数的广义胞腔性

苏志荣[1, *]，赵丽云[2]
[1,2]（广东工业大学数学与统计学院 广州 510520）

摘要：胞腔代数是近年来备受关注的一种代数结构，而正则半群是一类重要的半群，是半群代数理论的主要研究领域之一。基于Du和Rui所提出的一类广义胞腔代数——标准基代数，对正则半群代数的广义胞腔性进行了研究。

关键词：胞腔代数，正则半群，标准基代数
分类号：0152

Generalized Cellularity of Regular Semigroup Algebras

Su Zhirong[1, *], Zhao Liyun[2]
[1,2] (College of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China)

Abstract: Cellular algebra is an algebraic structure received considerable attention in recent years, and regular semigroup is an important semigroup, which is one of the main research fields of semigroup algebra theory. Based on the standardly based algebra proposed by Du and Rui, which is a kind of generalized cellular algebra, and the generalized cellularity of regular semigroup algebra is studied.

Keywords: cellular algebra, regular semigroup, standardly based algebra

1 引 言

胞腔代数的出现完满地解答了表示论中的一个最基本的问题——确定不可约表示的参数集。$Kazhdan-Lusztig$在文献[1]中研究$Hecke$代数的表示理论时，引入了$Kazhdan-Lusztig$基，通过这组基，他们确定了不可约表示和一些相关问题；受到$A-$型$Hecke$代数这组基的乘法性质的启发，$Graham$和$Lehrer$在文献[2]中首次引入了胞腔代数的概念；$König$和Xi在文献[3]中给出了胞腔代数的一种全新等价定义；Du和Rui在文献[4]中研究了一类广义胞腔代数——标准基代数。正则半群是一类重要的半群，是半群代数理论的主要研究领域之一。$East$在文献[5]研究了逆半群代数的胞腔性；$Wilcox$在文献[6]中考虑了有限正则半群代数的胞腔性，并且推广了$East$的结果；Guo和Xi在文献[7]中深入探讨了正则半群代数的胞腔性，推广了上面提到的$East$和$Wilcox$的结果。本文将探讨正则半群代数的广义胞腔性，从而把Guo和Xi的结果进行推广。

2 预备知识

在这一节中，我们给出本文需要的一些关于半群和标准基代数的基本概念和定义。本文的R将表示一个整环，自然数集N包括0。本节未提及的概念和定义请见参考文献[8-10]。

我们首先回顾一下关于半群的一些定义和结论。

设S是一个半群，$E(S)$是S的全部幂等元所组成的集合，如果半群S没有单位元，则用S^1表示半群S并上一个单位元，否则$S^1=S$。S上的格林关系$\mathcal{R}$，$\mathcal{L}$，$\mathcal{J}$，$\mathcal{H}$和$\mathcal{D}$在半群理论中起着十分重要的作用[11]，对于$a,b\in S$，有：

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow aS^1=bS^1;$$
$$a\mathcal{L}b \Leftrightarrow S^1a=S^1b;$$
$$a\mathcal{J}b \Leftrightarrow S^1aS^1=S^1bS^1;$$
$$\mathcal{H}=\mathcal{L}\cap\mathcal{R};$$
$$\mathcal{D}=\mathcal{L}\vee\mathcal{R}。$$

当S是一个有限半群时，格林关系$\mathcal{D}=\mathcal{J}$。设$\mathcal{K}$是S的格林关系之一，取K_a为S的$\mathcal{K}-$类并且包括a，$S/\mathcal{K}$为S的全部的$\mathcal{K}$类所组成的集合。我们定义：

$$aS^1\subseteq bS^1 \Longrightarrow R_a\leq R_b;$$
$$S^1a\subseteq S^1b \Longrightarrow L_a\leq L_b;$$
$$S^1aS^1\subseteq S^1bS^1 \Longrightarrow J_a\leq J_b。$$

因此，可得集合$S/\mathcal{R}$，$S/\mathcal{L}$和$S/\mathcal{J}$上的偏序集。

设S是一个半群，如果对任意$a\in S$，存在$b\in S$，使得$aba=a$，则称S为正则半群。

设S是一个不含零元0的半群，若S没有真理想，则称半群S是单的。含零元0的半群S叫做$0-$单半群，若满足：

1） 除$\{0\}$和本身之外不再有其他的理想；
2） $S^2\neq\{0\}$。

$0-$单半群S称为完全$0-$单半群，如果S含有一个本原幂等元。

设G是一个群，I和Λ是非空的集合，$P=(p_{\lambda k})$是$G^0:=G\cup\{0\}$上的一个正则$\Lambda\times\mathrm{I}$矩阵，即P的每一行和每一列都至少包含一个G^0中的非零元素。设$S=(G\times\mathrm{I}\times\Lambda)\cup\{0\}$，定义$S$上的乘法，任意$a,b\in G$，$k,l\in\mathrm{I}$，$\lambda,\mu\in\Lambda$，有：

$$(a,k,\lambda)(b,l,\mu)=\begin{cases}(ap_{\lambda l}b,k,\mu) & p_{\lambda l}\neq 0;\\ 0 & p_{\lambda l}=0。\end{cases}$$

并且$(a,k,\lambda)0=0(a,k,\lambda)=00=0$。如上定义的$S$是一个完全$0-$单半群，我们将用$\mathcal{M}^0(G,\mathrm{I},\Lambda;P)$来表示。在$\mathcal{M}^0(G,\mathrm{I},\Lambda;P)$中，我们可以假设$\mathrm{I}\cap\Lambda=\{0\}$，$G=(G,0,0)$，$p_{0,0}=e$，其中$e$是$G$的单位元。此外对于$\mathcal{M}^0(G,\mathrm{I},\Lambda;\mathrm{P})$的任意非零极大子群$G'$，我们有$\mathcal{M}^0(G,\mathrm{I},\Lambda;\mathrm{P})\cong\mathcal{M}^0(G',\mathrm{I},\Lambda;\mathrm{P})$。本文的$\mathcal{M}^0(G,\mathrm{I},\Lambda;P)$总是满足上述假设。

设S是一个含有零元的半群且$a\in S\setminus\{0\}$。令$S_a=J_a\cup\{0\}$，$0\notin J_a$，则在S_a上定义运算$\circ$，任意$x,y\in J_a$，有：

$$x\circ y=\begin{cases}xy & xy\in J_a;\\ 0 & xy\notin J_a。\end{cases}$$

其中xy是x和y在S上的乘积。显然，(S_a, $\circ$)是一个具有零元0的半群。称S_a为S的由a决定的主因子。将此乘法$R-$线性扩展到整个$R-$模$R[J_a]$，我们称$R[J_a]$关于乘法$\circ$是一个$R-$代数。注意，有限正则半群S的每一个主因子都是一个完全$0-$单半群。

任意$a \in S$，则$I(a) := \{b \in S^1aS^1 | S^1bS^1 \subset S^1aS^1\}$是$S^1aS^1$的一个理想，显然，$S^1aS^1 = J_a \dot{\cup} I(a)$。

半群S的每一个含有幂等元e的$\mathcal{H}-$类H_e是S的一个极大子群；反之，S的每一个极大子群都可以用含幂等元e的$\mathcal{H}-$类H_e来得到。任取$a \in S$，若$e \in J_a$，则$H_e \subseteq J_a \subseteq S_a$。由于$H_e$是$S$的一个极大子群，所以$H_e$也是$S_a$的一个极大子群。

如果(S, $\cdot$)是一个具有零元θ的半群，$R[S]$是域R上的向量空间，并且对于任意$r \in R$，$u, v \in R[S]$，有$r(u \cdot v) = (ru) \cdot v = u \cdot (rv)$，则$R[S]$是半群代数。定义$R_0[S] = R[S]/R[\theta]$。我们称$R-$代数$R_0[S]$是$R$上的$S$的压缩半群代数。若$S$没有零元，则$R_0[S] = R[S]$。设$a \in R_0[S]$，即$a = \sum_{s \in S\backslash\{\theta\}} r_s s$。定义$a$的支撑集为：

$$supp(a) = \{s \in S\backslash\{\theta\} | r_s \neq 0\}。$$

引理 2.1[10] 设S是一个半群：

1） 若$a, x \in S$，则$xa \in J_a$或$xa \in I(a)$。同理，$ax \in J_a$或$ax \in I(a)$；
2） 取$a, e = e^2 \in S$。若$a\mathcal{R}e$，则$a = ea$。同理，若$a\mathcal{L}e$，则$a = ae$。

引理 2.2[10] 任意(a,k,λ)，$(b,l,\mu) \in \mathcal{M}^0(G, \mathrm{I}, \Lambda; P)$，有如下三个等价论述：

1) $(a,k,\lambda)\mathcal{R}(b,l,\mu) \Leftrightarrow k = l$;
2) $(a,k,\lambda)\mathcal{L}(b,l,\mu) \Leftrightarrow \lambda = \mu$;
3) $(a,k,\lambda)\mathcal{H}(b,l,\mu) \Leftrightarrow k = l, \lambda = \mu$。

此外，完全$0-$单半群的任意非零元素都在同一个$\mathcal{D}-$类之中，以及任意两个含于完全$0-$单半群的极大子群是同构的。

定义 2.3[4] 设R为一个含幺交换环，则一个R系数的结合代数A是一个具有结构(Λ, M, N, C)的标准基代数，如果满足如下条件：

1） 存在一个偏序集Λ，使得对每个$\lambda \in \Lambda$都有指标集$M(\lambda)$和$N(\lambda)$，其中C是一个从$\coprod_{\lambda \in \Lambda} M(\lambda) \times N(\lambda)$到$A$的单射，并且$\mathfrak{B} = \{C_{S,T}^{\lambda} | \lambda \in \Lambda, S \in M(\lambda), T \in N(\lambda)\}$是$A$的一组$R-$基底；
2） 任意$a \in A$，$C_{S,T}^{\lambda} \in \mathfrak{B}$，有：
$$aC_{S,T}^{\lambda} \equiv \sum_{S' \in I(\lambda)} L_a(S', S)\, C_{S',T}^{\lambda} \quad (modA(<\lambda))。$$
其中$L_a(S', S) \in R$是与T无关的常数，$A(<\lambda)$是由$\{C_{U,V}^{\mu} | \mu < \lambda, U \in M(\mu), V \in N(\lambda)\}$生成的$R-$子模。
3） 任意$a \in A$，$C_{S,T}^{\lambda} \in \mathfrak{B}$，有：
$$C_{S,T}^{\lambda} a \equiv \sum_{T' \in J(\lambda)} R_a(T', T)\, C_{S,T'}^{\lambda} \quad (modA(<\lambda))。$$
其中$R_a(T', T) \in R$是与S无关的常数，$A(<\lambda)$是由$\{C_{U,V}^{\mu} | \mu < \lambda, U \in M(\mu), V \in N(\lambda)\}$生成的$R-$子模。

定义 2.4 设R为一个含幺交换环，S是一个半群（含有零元），则半群代数（压缩半群代数）$R[S]$（$R_0[S]$）是一个具有结构(Λ, M, N, C)的$\mathcal{J}$型标准基代数，如果它满足定义 2.3，且满足条件：每一个$\lambda \in \Lambda$，任意$S \in M(\lambda)$，$T \in N(\lambda)$，存在S的一个$\mathcal{J}-$类J，使得$supp(C_{S,T}^{\lambda}) \subseteq J$，注意$J$可能依赖于所取的$\lambda$。

定义 2.5 半群代数（压缩半群代数）$R[S](R_0[S])$是一个具有结构(Λ, M, N, C)的$\mathcal{JH}$型标准基代数，如果它既满足定义 2.4，又满足条件：每一个$\lambda \in \Lambda$以及$S \in M(\lambda)$，$T \in N(\lambda)$，存在S的一个$\mathcal{H}-$类H，使得$supp\left(C_{S,T}^{\lambda}\right) \subseteq H$。

3 半群代数的广义胞腔性

定理 3.1 设R是一个整环，$\mathfrak{S}$是一个半群，如果$R[\mathfrak{S}]$是一个具有结构(Λ, M, N, C)的$\mathcal{J}$型标准基代数，那么对于任意$a \in \mathfrak{S}$，$R-$代数$R[J_a]$都是一个具有结构$(\Lambda_a, M_a, N_a, C_a)$的标准基代数。

证明：首先给出如下定义：

- $\Lambda_a = \left\{\lambda \in \Lambda \middle| 存在S \in M(\lambda)，T \in N(\lambda)，使得supp\left(C_{S,T}^{\lambda}\right) \subseteq J_a\right\}$；
- $M_a = \cup_{\lambda \in \Lambda_a} M(\lambda)$；
- $N_a = \cup_{\lambda \in \Lambda_a} N(\lambda)$；
- $C_a = \cup_{\lambda \in \Lambda_a}\left\{C_{S,T}^{\lambda} \middle| S \in M(\lambda)，T \in N(\lambda)\right\}$。

则只需要证明如下三个问题：

1) $\left\{C_{S,T}^{\lambda} \middle| \lambda \in \Lambda_a，S \in M(\lambda)，T \in N(\lambda)\right\}$是$R[J_a]$的一组$R-$基。

根据题目假设可知，$\cup_{\alpha \in \Lambda}\left\{C_{S,T}^{\alpha} \middle| S \in M(\lambda)，T \in N(\lambda)\right\}$构成了$R[\mathfrak{S}]$的一组$R-$基。任意$x \in J_a$，有$x = \sum_{i \in I} \sum_{S \in M'(i), T \in N'(i)} r_{S,T}^{i} C_{S,T}^{i}$，其中$r_{S,T}^{i} \in R$，$I \subseteq \Lambda$和$M'(i) \subseteq M(i), N'(i) \subseteq N(i)$。根据假设，$R[\mathfrak{S}]$是一个$\mathcal{J}$型标准基代数，因此$\cup_{S \in M(i), T \in N(i)} supp\left(C_{S,T}^{i}\right)$含于$\mathfrak{S}$的某一个$\mathcal{J}-$类之中。则$\sum_{i \in I \cap (\Lambda \backslash \Lambda_a)} \sum_{S \in M'(i), T \in N'(i)} r_{S,T}^{i} C_{S,T}^{i} = 0$，因此$x = \sum_{i \in I \cap \Lambda_a} \sum_{S \in M'(i), T \in N'(i)} r_{S,T}^{i} C_{S,T}^{i} \in R[J_a]$。由此，$R[J_a]$可以由$\left\{C_{S,T}^{\alpha} \middle| \alpha \in \Lambda_a, S \in M(\alpha), T \in N(\alpha)\right\}$中的元素$R-$线性表出，即问题(1)得证。

2) 如果$\alpha \in \Lambda_a, S \in M(\alpha), T \in N(\alpha)$和$x \in J_a$，那么

$$x \circ C_{S,T}^{\alpha} \equiv \sum_{S' \in M(\alpha)} L_x(S', S)\, C_{S',T}^{\alpha} \quad \left(modR[J_a](< \lambda)\right),$$

其中系数$L_x(S', S) \in R$不依赖于T。

根据$\mathcal{J}$型标准基代数的定义可知，$xC_{S,T}^{\alpha} = \sum_{S' \in M(\alpha)} L_x(S', S)\, C_{S',T}^{\alpha} + x'$，其中$x' \in R[\mathfrak{S}](< \alpha)$，系数$L_x(S', S) \in R$不依赖于$T$。取$x' = \sum_{i \in I} \sum_{U \in M(i), V \in N(i)} L_{x'}(U, V) C_{U,V}^{i}$，其中$L_{x'}(U, V) \in R$，$I = \{i \in \Lambda | i < \alpha\}$。由于$R[\mathfrak{S}]$是一个$J$型标准基代数，设$x_1' = \sum_{i \in I \cap \Lambda_a} \sum_{U \in M(i), V \in N(i)} L_{x'}(U, V) C_{S,T}^{i} \in R[J_a]$，$x_2' = \sum_{i \in I \cap (\Lambda \backslash \Lambda_a)} \sum_{U \in M(i), V \in N(i)} L_{x'}(U, V) C_{S,T}^{i} \notin R[J_a]$，则$x' = x_1' + x_2'$。因此

$$x \circ C_{S,T}^{\alpha} = \sum_{S' \in M(\alpha)} L_x(S', S)\, C_{S',T}^{\alpha} + \sum_{i \in I \cap \Lambda_a} \sum_{U \in M(i), V \in N(i)} L_{x'}(U, V) C_{S,T}^{i} \in R[J_a]。$$

即问题(2)得证。

3) 如果$\alpha \in \Lambda_a$，$S \in M(\alpha)$，$T \in N(\alpha)$和$x \in J_a$，那么

$$C_{S,T}^{\alpha} \circ x \equiv \sum_{T' \in N(\alpha)} R_x(T', T)\, C_{S,T'}^{\alpha} \quad \left(modR[J_a](< \lambda)\right),$$

其中系数$R_x(T', T) \in R$不依赖于S。

根据$\mathcal{J}$型标准基代数的定义可知，$C_{S,T}^{\alpha} x = \sum_{T' \in N(\alpha)} R_x(T', T)\, C_{S,T'}^{\alpha} + x''$，其中$x'' \in R[\mathfrak{S}](< \alpha)$，系数$R_x(T', T) \in R$不依赖于$S$。取$x'' = \sum_{w \in W} \sum_{P \in M(w), Q \in N(w)} R_{x''}(P, Q) C_{P,Q}^{w}$，其中$R_{x''}(P, Q) \in R$，$W = \{w \in \Lambda | w < \alpha\}$。由于$R[\mathfrak{S}]$是一个$\mathcal{J}$型标准基代数，设$x_1'' =$

$\sum_{w\in W\cap\Lambda_a}\sum_{P\in M(w),Q\in N(w)}R_{x''}(P,Q)C_{P,Q}^{w}\in R[J_a]$，$x_2''=\sum_{w\in W\cap(\Lambda\backslash\Lambda_a)}\sum_{P\in M(w),Q\in N(w)}R_{x''}(P,Q)C_{P,Q}^{w}\notin R[J_a]$，则 $x''=x_1''+x_2''$。因此 $C_{S,T}^{\alpha}\circ x=\sum_{T'\in N(\alpha)}R_x(T',T)\,C_{S,T'}^{\alpha}+\sum_{w\in W\cap\Lambda_a}\sum_{P\in M(w),Q\in N(w)}R_{x''}(P,Q)C_{P,Q}^{w}\in R[J_a]$。即问题(3)得证。

综上所述，对于每一个 $a\in\mathfrak{S}$，$R-$代数 $R[J_a]$ 是一个具有结构 (Λ_a,M_a,N_a,C_a)的标准基代数。

证毕。

定理 3.2 设R是一个整环，$\mathfrak{S}=\mathcal{M}^0(G,\Lambda,\Gamma;P)$是一个完全$0-$单半群，$e$为$\mathfrak{S}\backslash\{0\}$的一个幂等元，设$p_{0,0}=e,0\in\Lambda\cap\Gamma$，则$R_0[\mathfrak{S}]$是一个$\mathcal{JH}$型标准基代数当且仅当$R[G]$是一个标准基代数，其中$G$是$\mathfrak{S}$关于单位元$e$的极大子群。

证明：假设$R_0[\mathfrak{S}]$是一个具有结构(I,M,N,C)的$\mathcal{JH}$型标准基代数。首先定义

- $K=\{\lambda\in I|$存在$S\in M(\lambda),T\in N(\lambda),supp(C_{S,T}^{\lambda})\subseteq G\}$，偏序集$K$可以由$(I,\leq)$推导而出；
- $M'(\lambda)=\{S\in M(\lambda)|\lambda\in K,\exists T\in N(\lambda),supp(C_{S,T}^{\lambda})\subseteq G\}$；
- $N'(\lambda)=\{T\in N(\lambda)|\lambda\in K,\exists S\in M(\lambda),supp(C_{S,T}^{\lambda})\subseteq G\}$；
- 当$\lambda\in K$，$S\in M'(\lambda)$，$T\in N'(\lambda)$时，取$D_{S,T}^{\lambda}=C_{S,T}^{\lambda}$。

为了证明$R[G]$是一个具有结构(K,M',N',D)的标准基代数，我们只需要证明如下三个问题：

1） $D:=\{D_{S,T}^{\lambda}|\lambda\in K,S\in M'(\lambda),T\in N'(\lambda)\}$是$R[G]$的一组$R-$基。

先证$D\subseteq R[G]$。设$S\in M'(\lambda)$，则存在$T\in N(\lambda)$，使得$C_{S,T}^{\lambda}\in R[G]$。由于$e$是$R[G]$的左单位元，则我们有$eC_{S,T}^{\lambda}=C_{S,T}^{\lambda}$。任取$T'\in N(\lambda)$，根据定义 2.3 的 2)可知，$L_e(S',S)\in R$是一个与$T$无关的常数，因此

$$eC_{S,T'}^{\lambda}=C_{S,T'}^{\lambda}+r'，\quad(1)$$

其中$r'=\sum_{\substack{i\in I\\ i<\lambda}}\sum_{U\in M(i),V\in N(\lambda)}L_{r'}(U,V)C_{U,V}^{i}$，$L_{r'}(U,V)\in R$。由于$supp(eC_{S,T'}^{\lambda})\subseteq R_e$，且等式(1)右边的每一个基元素的支撑都含于某个$\mathcal{H}-$类之中，因此等式(1)右边的任意非0系数的基元素都含于$R[R_e]$，则$C_{S,T'}^{\lambda}\in R[R_e]$。同理，设$T\in N'(\lambda)$，则存在$S\in M(\lambda)$，使得$C_{S,T}^{\lambda}\in R[G]$。由于$e$是$R[G]$的右单位元，则我们有$C_{S,T}^{\lambda}e=C_{S,T}^{\lambda}$。任取$S'\in M(\lambda)$，根据定义 2.3 的 3)可知，$R_e(T',T)\in R$是一个与$S$无关的常数，因此

$$C_{S',T}^{\lambda}e=C_{S',T}^{\lambda}+r''，\quad(2)$$

其中 $r''=\sum_{\substack{i\in I\\ i<\lambda}}\sum_{P\in M(i),Q\in N(\lambda)}R_{r''}(P,Q)C_{P,Q}^{i}$，$R_{r''}(P,Q)\in R$。由于$supp(C_{S',T}^{\lambda}e)\subseteq L_e$，且等式(2)右边的每一个基元素的支撑都含于某个$\mathcal{H}-$类之中，因此等式(2)右边的任意非0系数的基元素都含于$R[L_e]$，则$C_{S',T}^{\lambda}\in R[L_e]$。任取$S\in M'(\lambda),T\in N'(\lambda)$，有

$$C_{S,T}^{\lambda}\in R[R_e]\cap R[L_e]=R[G]。$$

再证$R[G]$可由D中的元素$R-$线性生成。设$a\in R[G]$，则$a=a_1+a_2$，其中a_1是由D中的元素$R-$线性生成，a_2是由$D':=\{C_{S,T}^{\lambda}|\lambda\in I,S\in M(\lambda),T\in N(\lambda)\}\backslash D$中的元素$R-$线性生成。当$C_{S,T}^{\lambda}\in D'$，有$supp(C_{S,T}^{\lambda})\subseteq\mathfrak{S}\backslash G$，则$a_2\in R[\mathfrak{S}\backslash G]$，又因为$a_2=a-a_1\in R[G]$，因此我们可得$a_2=0$。所以$R[G]$可由$D$中的元素$R-$线性生成。

综上，问题(1)得证。

2） 如果$g\in G$，$\lambda\in K$，$D_{S,T}^{\lambda}\in D(\lambda):=\{D_{U,V}^{\lambda}|U\in M'(\lambda),V\in N'(\lambda)\}$，那么

$$gD_{S,T}^{\lambda}=\sum_{S'\in N(\lambda)}L_g(S',S)\,D_{S',T}^{\lambda}+g',$$

其中$g'=\sum_{\substack{k\in K\\k<\lambda}}\sum_{U\in M'(k),V\in N'(k)}L_{g'}(U,V)D_{U,V}^{k}$，系数$L_g(S',S)\in R$且不依赖于$T$。

由于$R_0[\mathfrak{S}]$是一个具有结构(I,M,N,C)的$\mathcal{JH}$型标准基代数，因此有

$$gD_{S,T}^{\lambda}=gC_{S,T}^{\lambda}=\sum_{S'\in M'(\lambda)}L_g(S',S)\,C_{S',T}^{\lambda}+\sum_{S'\in M(\lambda)\setminus M'(\lambda)}L_g(S',S)\,C_{S',T}^{\lambda}+g_0',$$

其中$g_0'=\sum_{\substack{k\in I\\k<\lambda}}\sum_{U\in M(k),T\in N(k)}L_{g_0'}(U,V)C_{U,V}^{k}$，系数$L_g(S',S)$不依赖于$T$。注意，由于$supp\left(C_{S,T}^{\lambda}\right)\subseteq G$和$supp\left(gC_{S,T}^{\lambda}\right)\subseteq G$，可得$\sum_{S'\in M(\lambda)\setminus M'(\lambda)}L_g(S',S)\,C_{S',T}^{\lambda}+g_0'\subseteq G$。又因为$g_0'$的线性表达式中各个基元素的上索引值都严格小于$\lambda$，则$\sum_{S'\in M(\lambda)\setminus M'(\lambda)}L_g(S',S)\,C_{S',T}^{\lambda}=0$，$g_0'\in R[G]$。根据问题(1)可知，$g_0'$可以由$D$中的元素$R-$线性表示，并且$g_0'$的线性表达式中各个基元素的上索引值都严格小于$\lambda$，问题(2)得证。

3） 如果$g\in G$，$\lambda\in K$，$D_{S,T}^{\lambda}\in D(\lambda):=\{D_{S,T}^{\lambda}|S,T\in N(\lambda)\}$，那么

$$D_{S,T}^{\lambda}g=\sum_{T'\in N(\lambda)}R_g(T',T)\,D_{S,T'}^{\lambda}+g'',$$

其中$g''=\sum_{\substack{k\in K\\k<\lambda}}\sum_{U\in M'(k),V\in N'(k)}R_{g''}(U,V)C_{U,V}^{k}$，系数$R_g(T',T)\in R$且不依赖于$S$。

同理，由于$R_0[\mathfrak{S}]$是一个具有结构(I,M,N,C)的$\mathcal{JH}$型标准基代数，因此有

$$D_{S,T}^{\lambda}g=C_{S,T}^{\lambda}g=\sum_{T'\in N'(\lambda)}R_g(T',T)\,C_{S,T'}^{\lambda}+\sum_{T'\in N(\lambda)\setminus N'(\lambda)}R_g(T',T)\,C_{S,T'}^{\lambda}+g_0'',$$

其中$g_0''=\sum_{\substack{k\in I\\k<\lambda}}\sum_{U\in M(k),T\in N(k)}R_{g_0''}(U,V)C_{U,V}^{k}$，系数$R_g(T',T)$不依赖于$S$。注意，由于$supp\left(C_{S,T}^{\lambda}\right)\subseteq G$和$supp\left(C_{S,T}^{\lambda}g\right)\subseteq G$，可得$\sum_{T'\in N(\lambda)\setminus N'(\lambda)}R_g(T',T)\,C_{S,T'}^{\lambda}+g_0''\subseteq G$。又因为$g_1$的线性表达式中各个基元素的上索引值都严格小于$\lambda$，则$\sum_{T'\in N(\lambda)\setminus N'(\lambda)}R_g(T',T)\,C_{S,T'}^{\lambda}=0$，$g_0''\in R[G]$。根据问题(1)可知，$g_0''$可以由$D$中的元素$R-$线性表示，并且$g_0''$的线性表达式中各个基元素的上索引值都严格小于$\lambda$，问题(3)得证。

假设G的群代数$R[G]$是一个具有结构(K,M',N',D)的标准基代数。我们可以假设$\mathfrak{S}=\mathcal{M}^0(G,\Lambda,\Gamma;P)$。对于$\lambda\in K$，定义$M(\lambda)=\Lambda\times M'(\lambda)$，$N(\lambda)=\Gamma\times N'(\lambda)$以及$(x,S)\in M(\lambda)$，$(y,T)\in N(\lambda)$，有$C_{(x,S),(y,T)}^{\lambda}=\left(D_{S,T}^{\lambda},x,y\right)$。接下来我们将开始证明$R_0[\mathfrak{S}]$是一个具有结构$(K,M,N,C)$的标准基代数。

根据假设可知，$\{D_{S,T}^{\lambda}|\lambda\in K,S\in M'(\lambda),T\in N'(\lambda)\}$是$R[G]$的一组$R-$基，对于任意元素$(a,x,y)\in(R[G],x,y)$都能被$B:=\{C_{(x,S),(y,T)}^{\lambda}|\lambda\in K,(x,S)\in M(\lambda),(y,T)\in N(\lambda)\}$中的元素$R-$线性表示，因此可证$B$是$R_0[\mathfrak{S}]$的一组$R-$基。

任取$g\in G$，$u\in\Lambda,v\in\Gamma$，有$(g,u,v)\in\mathfrak{S}$。再取基元素$C_{(x,S),(y,T)}^{\alpha}\in B$，有

$$(g,u,v)C_{(x,S),(y,T)}^{\alpha}=(g,u,v)\left(D_{S,T}^{\alpha},x,y\right)=\left(gp_{v,x}D_{S,T}^{\alpha},u,y\right),$$

又由于$R[G]$是一个标准基代数，有

$$gp_{v,x}D_{S,T}^{\alpha}=\sum_{S'\in M'(\alpha)}L_{gp_{v,x}}(S',S)D_{S',T}^{\alpha}+\sum_{\lambda<\alpha,\lambda\in K,U\in M'(\lambda),V\in N'(\lambda)}L(\lambda,U,V)D_{U,V}^{\lambda},\quad(3)$$

其中上述等式系数$L_{gp_{v,x}}(S',S)\in R$但不依赖于T，又因为元素$gp_{v,x}D_{S,T}^{\lambda}$可由$R[G]$

中的 $R-$ 基 $\{D^{\lambda}_{S,T} | \lambda \in K, S \in M'(\lambda), T \in N'(\lambda)\}$ 线性表示，可写成

$$gp_{v,x}D^{\alpha}_{S,T} = \sum_{\lambda \in K, U \in M'(\alpha), V \in N'(\alpha)} L(\alpha, S, T, v, x, g; \lambda, U, V)D^{\lambda}_{U,V}。(4)$$

对比等式(3)和(4)，可以发现，对于任意$S' \in M'(\alpha), \lambda = \alpha, U \in M'(\alpha), V \in N'(\alpha)$ 都有 $L(\alpha, S, T, v, x, g; \lambda, S', S) = L_{gp_{v,x}}(S', S)$，显然也可以发现 $L(\alpha, S, T, v, x, g; \lambda, S', S)$不依赖于$y$，又因为$L_{gp_{v,x}}(S', S)$也不依赖于$T$，因此我们可以得到$L(\alpha, S, T, v, x, g; \lambda, S', S)$不依赖于$y$和$T$。而且对于任意$\lambda < \alpha, U \in M'(\lambda), V \in N'(\lambda)$，$L(\alpha, S, T, v, x, g; \lambda, U, V) = L(\lambda, U, V)$。则

$$(g, u, v)C^{\alpha}_{S,T} \equiv \sum_{(u,S') \in M(\lambda)} L(\alpha, S, T, v, x, g; \alpha, S', S)C^{\alpha}_{(u,S'),(y,T)} \quad \big(modR_0[\mathfrak{S}](< \alpha)\big)。$$

定义 2.3 的 2)得证。

同理，任取$g \in G$，$u \in \Lambda, v \in \Gamma$，有$(g, u, v) \in S$。再取基元素$C^{\alpha}_{(x,S),(y,T)} \in B$，有

$$C^{\alpha}_{(x,S),(y,T)}(g, u, v) = \big(D^{\alpha}_{S,T}, x, y\big)(g, u, v) = \big(D^{\alpha}_{S,T}p_{y,u}g, x, v\big),$$

又由于$R[G]$是一个具有结构(K, M, N, C)的标准基代数，有

$$D^{\alpha}_{S,T}p_{y,u}g = \sum_{T' \in N'(\alpha)} R_{p_{y,u}g}(T', T)D^{\alpha}_{S,T'} + \sum_{\lambda < \alpha, \lambda \in K, U \in M'(\lambda), V \in N'(\lambda)} R(\lambda, U, V)D^{\lambda}_{U,V}，(5)$$

其中上述等式系数$R_{p_{y,u}g}(T', T) \in R$但不依赖于$S$，又因为元素$D^{\alpha}_{S,T}p_{y,u}g$可由$R[G]$ 中的 $R-$ 基 $\{D^{\lambda}_{S,T} | \lambda \in K, S \in M'(\lambda), T \in N'(\lambda)\}$ 线性表示，可写成

$$D^{\alpha}_{S,T}p_{y,u}g = \sum_{\lambda \in K, U \in M'(\lambda), V \in N'(\lambda)} R(\alpha, S, T, y, u, g; \lambda, U, V)D^{\lambda}_{U,V}。(6)$$

对比等式(5)和(6)，可以发现，对于任意$T' \in N'(\alpha), U \in M'(\alpha), V \in N'(\alpha)$都有 $R(\alpha, S, T, y, u, g; \lambda, T', T) = R_{p_{y,u}g}(T', T)$，显然也可以发现 $R(\alpha, S, T, y, u, g; \lambda, T', T)$不依赖于$x$，又因为$R_{p_{y,u}g}(T', T)$也不依赖于$S$，因此我们可以得到$R(\alpha, S, T, y, u, g; \lambda, T', T)$不依赖于$x$和$S$。而且对于任意$\lambda < \alpha, U \in M'(\lambda), V \in N'(\lambda)$，有$R(\alpha, S, T, y, u, g; \lambda, U, V) = R(\lambda, U, V)$。则

$$C^{\alpha}_{S,T}(g, u, v) \equiv \sum_{(v,T') \in N(\lambda)} R(\alpha, S, T, y, u, g; \lambda, T', T)C^{\alpha}_{(x,S),(v,T')} \quad \big(modR_0[\mathfrak{S}](< \alpha)\big)。$$

定义 2.3 的 3)得证。因此$R_0[\mathfrak{S}]$是一个具有结构(K, M, N, C)的标准基代数，显然$R_0[\mathfrak{S}]$也满足$\mathcal{JH}$型标准基代数的定义，因此$R_0[S]$还是一个$\mathcal{JH}$型标准基代数。

证毕。

定理 3.3 设R是一个整环，$\mathfrak{S}$是一个主因子为$\mathcal{M}^0 = (G_\alpha, \Lambda_\alpha, \Gamma_\alpha; P_\alpha)$的有限正则半群，其中$\alpha$取遍$Y = \mathfrak{S}/\mathcal{J}$，设$E = \{e \in \mathfrak{S} | 0 \neq e = e^2\}$。取$e \in E$，令$G_e$为$\mathfrak{S}$关于单位元$e$的极大子群。如果对于$\alpha \in Y$，都有$E_\alpha := E \cap E\big(\mathcal{M}^0 = (G_\alpha, \Lambda_\alpha, \Gamma_\alpha; P_\alpha)\big) \neq \emptyset$，则$R[\mathfrak{S}]$是一个$\mathcal{JH}$型标准基代数当且仅当任意$\alpha \in Y$，存在$e \in E_\alpha$，使得$R[G_e]$是一个标准基代数。

证明：假设$R[\mathfrak{S}]$是一个具有结构(I, M, N, C)的$\mathcal{JH}$型标准基代数，根据定理 3.1 可知，任意$a \in \mathfrak{S}$，都有$R[J_a]$是一个标准基代数。选定$\alpha \in Y$，令$J_a = \mathcal{M}^0(G_\alpha, \Lambda_\alpha, \Gamma_\alpha; P_\alpha)\backslash\{0\}$，则有$\mathfrak{S}_a \cong \mathcal{M}^0(G_\alpha, \Lambda_\alpha, \Gamma_\alpha; P_\alpha)$。因为$E_\alpha \neq \emptyset$，存在$e \in E_\alpha$。如第二节所述，$\mathfrak{S}_a = \mathcal{M}^0(G_e, \Lambda_\alpha, \Gamma_\alpha; P_\alpha)$。定义单位元$e = (e, 0,0)$，根据定理 3.2，我们可证得$R[G_e]$也是一个标准基代数。

假设任意$\alpha \in Y$，存在$e \in E_\alpha$，使得$R[G_e]$是一个标准基代数。任取$a \in \mathfrak{S}$，先证$R[J_a]$是一个$\mathcal{JH}$型标准基代数。因为$\mathfrak{S}$是一个主因子为$\mathcal{M}^0 = (G_\alpha, \Lambda_\alpha, \Gamma_\alpha; P_\alpha)$的有限正则半群，因此存在$\alpha \in Y$，使得$a$决定的主因子$(\mathfrak{S}_a := J_a \cup \{0\}, \circ)$为$\mathcal{M}^0(G_\alpha, \Lambda_\alpha, \Gamma_\alpha; P_\alpha)$。选定$e \in E_\alpha$，使得$R[G_e]$是一个具有结构$(K'_a, M'_a, N'_a, D)$的标准基代数，根据定理 3.2 可知，$R[J_a]$是一个具有结构$(K_a, M_a, N_a, C_a)$的$\mathcal{JH}$型标准基代数，其中$K_a := K'_a$，$M_a(\lambda) := \Lambda_\alpha \times M'_a(\lambda)$，$N_a(\lambda) := \Gamma_\alpha \times N'_a(\lambda)$以及任意$(x,S) \in M_a(\lambda)$，$(y,T) \in N_a(\lambda)$，有$C^\lambda_{a;(x,S),(y,T)}$。

令$\mathfrak{J}$为S的$\mathcal{J}-$类的所有代表元所成的集合。现在我们要证$R[\mathfrak{S}]$是一个具有结构$(\mathfrak{T}, M', N', D)$的$\mathcal{JH}$型标准基代数，其中$\mathfrak{T} = \cup_{a\in\mathfrak{J}}(a, K_a)$定义偏序≤：任意$a, b \in \mathfrak{J}$，$\lambda \in K_a$，$\mu \in K_b$以及$\lambda \neq \mu$，则$(a,\lambda) < (b,\mu) \Leftrightarrow J_a < J_b$或者当$J_a = J_b$时，$\lambda < \mu$且$\lambda, \mu \in K_a$。任取$(a,\lambda) \in (a, K_a)$，定义$M'(a,\lambda) = M_a(\lambda)$，$N'(a,\lambda) = N_a(\lambda)$以及任取$U \in M'(a,\lambda), V \in N'(a,\lambda)$，有$D^{(a,\lambda)}_{U,V} = C^\lambda_{a;U,V}$。

由于$R[J_a]$是一个具有结构(K_a, M_a, N_a, C_a)的$\mathcal{JH}$型标准基代数，则$\cup_{(a,\lambda)\in(a,K_a)}\left\{D^{(a,\lambda)}_{U,V}\middle| U \in M'(a,\lambda), V \in N'(a,\lambda)\right\}$构成$R[J_a]$的一组$R-$基。则我们可以证得$\cup_{a\in\mathfrak{J};(a,\lambda)\in(a,K_a)}\left\{D^{(a,\lambda)}_{U,V}\middle| U \in M'(a,\lambda), V \in N'(a,\lambda)\right\}$构成$R[\mathfrak{S}]$的一组$R-$基，定义 2.3 的 1)得证。

假设$a, b \in \mathfrak{J}$，若$b \in I(a)$，$\mu \in K_b$以及$\alpha \in K_a$，有$(b,\mu) < (a,\alpha)$。事实上

$$b \in I(a) \Leftrightarrow \mathfrak{S}^1 b \mathfrak{S}^1 \subset \mathfrak{S}^1 a \mathfrak{S}^1 \Leftrightarrow J_b < J_a。$$

如果$b \in I(a)$，那么对于任意$\mu \in K_b$以及$\lambda \in K_a$，都有$(b,\mu) < (a,\lambda)$。现在我们可以假设$\lambda \in K_a$，$(x,S) \in M_a(\lambda), (y,T) \in N_a(\lambda)$以及$c \in \mathfrak{S}$，考虑$cD^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)} = cC^\lambda_{a;(x,S),(y,T)}$，其中$C^\lambda_{a;(x,S),(y,T)} \in R[J_a]$。令$G_e = (G_e, 0, 0)$，则根据$supp(C^\lambda_{S,T}) \subseteq G_e$，有$supp(C^\lambda_{a;(x,S),(y,T)}) \subseteq R[(G_e, x, y)]$。

根据引理 2.1 可知，$c(e,x,0) \in J_a$或者$c(e,x,0) \in I(a)$。

假设$c(e,x,0) \in I(a)$。有

$$cD^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)} = cC^\lambda_{a;(x,S),(y,T)} = c(e,x,0)(C^\lambda_{S,T}, 0, y)。$$

因为$I(a)$是$\mathfrak{S}^1 a \mathfrak{S}^1$的一个理想，因此可得$cD^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)} \in R[I(a)]$。存在$\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{J}$，使得$\mathfrak{J}_1 \subseteq I(a)$以及$cD^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)} \in \cup_{b\in\mathfrak{J}_1} R[J_b]$。又由于当$b \in \mathfrak{J}_1$，$\mu \in K_b$以及$\alpha \in K_a$时，有$(b,\mu) < (a,\alpha)$，因此可得$\cup_{b\in\mathfrak{J}_1} R[J_b] \subset R[\mathfrak{S}](< (a,\lambda))$，即$cD^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)} \in R[\mathfrak{S}](< (a,\lambda))$。

假设$c(e,x,0) \in J_a$，有

$$\begin{aligned} cD^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)} &= cC^\lambda_{a;(x,S),(y,T)} \\ &= c\left[(e,x,0)\left(C^\lambda_{S,T}, 0, y\right)\right] \\ &= c(e,x,0)\left(C^\lambda_{S,T}, 0, y\right) \\ &= c(e,x,0)D^{(a,\lambda)}_{(0,S),(y,T)}。\end{aligned}$$

由于$R[J_a]$是一个具有结构(K_a, M_a, N_a, C_a)的$\mathcal{JH}$型标准基代数，有

$$c(e,x,0)D^{(a,\lambda)}_{(0,S),(y,T)} = \sum_{(s,S')\in M'(a,\lambda)} L_{c(e,x,0)}\big((s,S'),(0,S)\big)C^\lambda_{a;(s,S'),(y,T)} + z， \quad (7)$$

其中$z \in R[J_a](< \lambda)$，系数$L_{c(e,x,0)}\big((s,S'),(0,S)\big) \in R$且不依赖于$(y,T)$。

由于$Q := \cup_{a\in\mathfrak{J};(a,\lambda)\in(a,K_a)}\left\{D^{(a,\lambda)}_{U,V}\middle| U \in M'(a,\lambda), V \in N'(a,\lambda)\right\}$构成$R[\mathfrak{S}]$的一组$R-$基，因此$cC^\lambda_{a;(x,S),(y,T)}$可以由 Q 中的元素$R-$线性表示，有

$$cC^{\lambda}_{a;(x,S),(y,T)} = \sum L(\lambda,s,S',y,T)C^{\lambda}_{a;(s,S'),(y,T)} + z', \quad (8)$$

其中z'是由$\{C^{\mu}_{b;U',V'} | b \in \mathfrak{J}; (b,\mu) \neq (a,\lambda); U' \in M'(b,\mu), V' \in N'(b,\mu)\}$中的元素$R-$线性表示。对比等式（7）和（8）可知，$cC^{\lambda}_{a;(x,S),(y,T)} \equiv \sum_{(s,S')\in M'(a,\lambda)} L_{c(e,x,0)}\big((s,S'),(0,S)\big)C^{\lambda}_{a;(s,S'),(y,T)} \; \big(modR[\mathfrak{S}](<(a,\lambda))\big)$。则定义 2.3 的 2)得证。

同理，根据引理 2.1 可知，$(e,0,y)c \in J_a$或者$(e,0,y)c \in I(a)$。

假设$(e,0,y)c \in I(a)$。有

$$D^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)}c = C^{\lambda}_{a;(x,S),(y,T)}c = \big(C^{\lambda}_{S,T},x,0\big)(e,0,y)c。$$

因为$I(a)$是$\mathfrak{S}^1 a \mathfrak{S}^1$的一个理想，因此可得$D^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)}c \in R[I(a)]$。存在$\mathfrak{J}_2 \subset \mathfrak{J}$，使得$\mathfrak{J}_2 \subseteq I(a)$以及$D^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)}c \in \cup_{h\in\mathfrak{J}_2} R[J_h]$。又由于当$h \in \mathfrak{J}_2$，$\mu \in K_b$以及$\alpha \in K_a$时，有$(b,\mu) < (a,\alpha)$，因此可得$\cup_{h\in\mathfrak{J}_2} R[J_h] \subset R[\mathfrak{S}]\big(<(a,\lambda)\big)$，即$D^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)}c \in R[\mathfrak{S}]\big(<(a,\lambda)\big)$。

假设$(e,0,y)c \in J_a$，有

$$\begin{aligned} D^{(a,\lambda)}_{(x,S),(y,T)}c &= C^{\lambda}_{a;(x,S),(y,T)}c \\ &= \big[\big(C^{\lambda}_{S,T},x,0\big)(e,0,y)\big]c \\ &= \big(C^{\lambda}_{S,T},x,0\big)[(e,0,y)c] \\ &= D^{(a,\lambda)}_{(x,S),(0,T)}[(e,0,y)c]。\end{aligned}$$

由于$R[J_a]$是一个具有结构(K_a,M_a,N_a,C_a)的$\mathcal{JH}$型标准基代数，有

$$D^{(a,\lambda)}_{(x,S),(0,T)}[(e,0,y)c] = \sum_{(t,T')\in N'(a,\lambda)} R_{(e,0,y)c}\big((t,T'),(0,T)\big)C^{\lambda}_{a;(x,S),(t,T')} + w, \quad (9)$$

其中$w \in R[J_a](<\lambda)$，系数$R_{(e,0,y)c}\big((t,T'),(0,T)\big) \in R$且不依赖$(x,S)$。

由于$Q := \cup_{a\in\mathfrak{J};(a,\lambda)\in(a,K_a)}\Big\{D^{(a,\lambda)}_{U,V}\Big| U \in M'(a,\lambda), V \in N'(a,\lambda)\Big\}$构成$R[\mathfrak{S}]$的一组$R-$基，因此$C^{\lambda}_{a;(x,S),(y,T)}c$可以由 Q 中的元素$R-$线性表示，有

$$C^{\lambda}_{a;(x,S),(y,T)}c = \sum R(\lambda,x,S,t,T')C^{\lambda}_{a;(x,S),(t,T')} + w', \quad (10)$$

其中w'是由$\{C^{\mu}_{b;U',V'} | b \in \mathfrak{J}; (b,\mu) \neq (a,\lambda); U' \in M'(b,\mu), V' \in N'(b,\mu)\}$中的元素$R-$线性表示。对比等式（9）和（10）可知，$C^{\lambda}_{a;(x,S),(y,T)}c \equiv \sum_{(t,T')\in N'(a,\lambda)} R_{(e,0,y)c}\big((t,T'),(0,T)\big)C^{\lambda}_{a;(x,S),(t,T')} \; \big(modR[\mathfrak{S}](<(a,\lambda))\big)$。则定义 2.3 的 3)得证。

综上所述，$R[\mathfrak{S}]$是一个具有结构$(\mathfrak{T},M',N',D)$的标准基代数，显然$R[\mathfrak{S}]$也满足$\mathcal{JH}$型标准基代数的定义，因此$R[\mathfrak{S}]$是一个$\mathcal{JH}$型标准基代数。

证毕。

推论 3.4 设R是一个整环，$\mathfrak{S}$是一个主因子为$\mathcal{M}^0 = (G_\alpha,\Lambda_\alpha,\Gamma_\alpha;P_\alpha)$的有限正则半群，其中$\alpha$取遍$Y = \mathfrak{S}/\mathcal{J}$。$E$是$\mathfrak{S}$的所有幂等元所构成的集合，任取$e \in E$，令$G_e$为$\mathfrak{S}$关于单位元$e$的极大子群。任意$\alpha \in Y = \mathfrak{S}/\mathcal{J}$，有$E \cap E\big(\mathcal{M}^0 = (G_\alpha,I_\alpha,\Gamma_\alpha;P_\alpha)\big) \neq \emptyset$，则$R[\mathfrak{S}]$是一个$\mathcal{JH}$型标准基代数当且仅当对于每一个$e \in E$，都有群代数$R[G_e]$是一个标准基代数。

参考文献：

[1] D. Kazhdan, G. Lusztig. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras[J]. Inventiones mathematicae, 1979, 53(2):165–184.
[2] J.J. Graham, G.I. Lehrer. Cellular algebras[J]. Inventiones mathematicae, 1996, 123(1):1-34.
[3] S. König, C.C. Xi. On the Structure of Cellular Algebras[J]. Algebras and modules, 1996, 365–386.
[4] J. Du, H.B. Rui. Based algebras and standard bases for quasi-hereditary algebras[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1998, 350(8):3207-3235.
[5] J. East. Cellular algebras and inverse semigroups[J]. Journal of Algebra, 2006, 296:505–519.
[6] S. Wilcox. Cellularity of diagram algebras and twisted semigroup algebras[J]. Journal of Algebra, 2007, 309(1):10–31.
[7] X.J. Guo, C.C. Xi. Cellularity of twisted semigroup algebras[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2009, 213:71–86.
[8] J.M. Howie. Fundamentals of semigroup theory[M]. Oxford: Oxford University Press, 1995.
[9] J. Okniński. Semigroup Algebras[M]. New York: Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., 1991.
[10] J.M. Howie. An Introduction to Semigroup Theory[M]. London: Academic Press, 1976.
[11] J.A. Green. On the structure of semigroups[J]. Annals of Mathematics, 1951, 54(2):163–172.

(通讯作者：苏志荣　E-mail：2112014026@mail2.gdut.edu.cn)